ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES
Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère des Universités
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
551 32 59 ● 705 90 21

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE MAI 1979

MATHEMATIQUES 2ème EPREUVE

Durée 2H - Coefficient 2

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

On considère $\mathbb{Z}^n$ comme sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^n$.

1°) Soit ϕ l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{Z}^n$, on pose

$$\theta(x) = \phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Montrer que θ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Déterminer son noyau K et son image.
Quel est le nombre d'éléments du groupe $\mathbb{Z}^n/K$?

2°) Montrer que K est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^n$ tels que f(x, x) soit pair, et aussi le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par les vecteurs

$$e_i - e_n, \quad e_i + e_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

.../...

3°) Soit S l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^n$ tels que f(x, x) = 1 ou f(x, x) = 2. Déterminer les éléments de S et leur nombre.

4°) On pose

$a_1 = e_1 - e_2$, $a_2 = e_2 - e_3$, ..., $a_{n-1} = e_{n-1} - e_n$, $a_n = e_n$.

Montrer que les vecteurs a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) forment une base de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, calculer ses coordonnées par rapport à la base $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Exprimer les éléments de S comme combinaison linéaire des vecteurs a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

5°) Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de base $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Quelle relation vérifient les coordonnées d'un vecteur x de V par rapport à la base $(e_1, e_2, \ldots e_n)$?

On pose T = S ∩ V. Déterminer les éléments de T et leur nombre. Calculer f(x, x) pour un élément de T.

On pose $a'_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, montrer que V est l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x, a'_n) = 0$

Montrer que $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a'n)$ est une base de R^n.

6°) Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Montrer qu'il existe un vecteur b_i de $\mathbb{R}^n$, et un seul, tel que

(1) $f(b_i , a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et,

(2) $f(b_i , a'_n) = 0$

On déterminera b_i par ses coordonnées relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots e_n)$.

7°) Montrer en utilisant les relations (1) et (2) que $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sont linéairement indépendants et forment une base de V. Exprimer les b_i comme combinaisons linéaires de a_j. Pour n = 4, calculer la matrice de passage M de la base $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ à la base $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$.

Exercice 2

Dans un magasin se trouvent quatre lots de pièces dont les proportions de défectueux sont 5%, 5%, 8%, 10%. Les étiquettes ont été perdues. Dans chacun des lots, on prélève un échantillon de 10 pièces : l'un des échantillons ne comporte aucun défectueux, deux échantillons comportent un défectueux, un échantillon comporte deux défectueux. Au vu de ces résultats, on choisit une façon d'affecter les étiquettes.

1°) Combien y-a-t-il d'affectations possibles ?

2°) Pour chacune de ces affectations, évaluer la probabilité qu'elle soit correcte.

Exercice 3

On se propose d'étudier l'ensemble E des suites (U_n) telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;,\; 2\,U_{n+2} - 5\,U_{n+1} + 2\,U_n = 0$$

1°) Montrer que l'addition de deux suites et la multiplication d'une suite par un réel confèrent à l'ensemble une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

2°) Montrer qu'une progression géométrique (ζ^n), ζ non nul, appartient à E si, et seulement si ζ vérifie la relation

$$2\,\zeta^2 - 5\,\zeta + 2 = 0$$

Calculer les valeurs de ζ qui répondent à la question.

3°) Montrer que toute suite $(\lambda\, 2^{-n} + \mu\, 2^n)$, où λ et μ désignent deux nombres réels arbitraires, appartient à E.

4°) Soient a et b deux nombres réels. Montrer qu'il existe dans E au plus une suite (U_n) vérifiant $U_0 = a$ et $U_1 = b$.

5°) Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer qu'à chaque élément (U_n) de E on peut associer un couple unique (λ, μ) de nombres réels tel que $(U_n) = (\lambda\, 2^{-n} + \mu\, 2^n)$.

6°) Soient a et b deux nombres réels. Montrer qu'il existe dans E une suite (U_n) vérifiant $U_0 = a$ et $U_1 = b$.

Application : Calculer λ et μ quand $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$, puis quand $a = 2$ et $b = \frac{5}{2}$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail